

MathB.in will be shutting down on Sunday, 16 March 2025.

MathB.in is currently running in readonly mode. You cannot submit new posts anymore. If you have got any important posts here that you would like to keep, now is the time to copy and save them for yourself.

For an alternative way to write, archive, and share your mathematical notes using Markdown + LaTeX (MathJax), consider [MathCask](#). It uses the same set of parsers that MathB.in uses to parse Markdown and MathJax-LaTeX. It allows you to create self-rendering documents and share them easily on the web using your own web space! With it, you own and control your snippets indefinitely, ensuring that they remain accessible on your own terms.

For more details about the closure of this service, [read this article](#).

Thank you for being a part of MathB.in!

Soit $\varepsilon > 0$, $\omega > 0$, $A > 0$ assez grand, et $f : \Omega \supset [A, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, tels que $|f(x)| < |1/x^\varepsilon|$ pour $x > A$, et f changeant de signe au moins une fois mais qu'un nombre fini de fois sur tout intervalle $[x, x + \omega]$ pour $x > A$. Alors, f est intégrable sur $[A, +\infty[$.

Preuve.

Par Chasles, $\int_A^\infty f(x) dx$, s'il existe, devrait valoir :

$$\int_A^{\lceil A/\omega \rceil \cdot \omega} f(x) dx + \sum_{n=\lceil A/\omega \rceil}^\infty \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} f(x) dx$$

où $\lceil \cdot \rceil$ est la fonction "arrondi supérieur". On pourra supposer, sans perte de généralité, que A est telle que $\lceil A/\omega \rceil \cdot \omega = A$, c'est-à-dire $A \in \omega \cdot \mathbb{N}^*$ (car $\omega \cdot \mathbb{N}^*$ a pour suprémum $+\infty$), comme ça on peut simplifier considérablement l'expression ci-haute qui devient alors ceci :

$$\sum_{n=A/\omega}^\infty \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} f(x) dx$$

Puisque $x \mapsto 1/x^\varepsilon$ est strictement décroissante,

$$\left(\frac{1}{(n+1)\omega}\right)^\varepsilon \cdot \omega \leq \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} \frac{1}{x^\varepsilon} dx \leq \left(\frac{1}{n\omega}\right)^\varepsilon \cdot \omega$$

donc par théorème du sandwich, (*) $\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} 1/x^\varepsilon dx \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Soit I tel que " $\lim_{x^-} \text{sgn}(f) \neq \lim_{x^+} \text{sgn}(f)$ et $x \geq A$, ou bien $x = A$ " si et seulement si $x \in I$. Alors, puisque f change de signe qu'un nombre fini de fois par tout intervalle de longueur ω (par hypothèse), on sait que I est d'adhérence discrète*, donc une fonction successeur** $\text{suc}(I, \cdot)$ en découle. On peut alors définir $a_0 := A = \min(I)$ et $a_{k+1} := \text{suc}(I, a_k)$ et déterminer que :

$$\int_A^\infty f(x) dx = \sum_{k=0}^\infty \underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx}_{\rightarrow 0 \text{ par dom. avec (*)}}$$

est une série alternée de sommande tendant vers 0, ce qui signifie qu'elle converge, et donc que f est intégrable sur $[A, +\infty[$.

(* un ensemble D est dit discret si chacun de ses points est isolé, c'est-à-dire que pour tout $x \in D$, y existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $|x - y| < \varepsilon_x \iff x = y$ ou $y \notin D$. si l'adhérence de D est discrète, c'est en réalité encore plus simple à expliquer : ça signifie juste que toute intersection de D avec un borné est fini.)

(** sur un ensemble d'adhérence discrète $D \subseteq \mathbb{R}$, y est possible de lister tous les éléments de D de sorte à ce qu'ils soient dans un ordre croissant. le successeur de $x \in D$ te retourne juste l'élément le plus petit de D qui soit strictement plus grand que x . par exemple, pour $D = \mathbb{Z}$, puisque d'adhérence discrète, on a l'incrémement $(\cdot + 1)$ qui sert de fonction successeur)