Soit $\varepsilon > 0, \omega > 0, A > 0$ assez grand, et $f : \Omega \supset [A, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, tels que $|f(x)| < |1/x^\varepsilon|$ pour $x > A$, et f changeant de signe au moins une fois mais qu'un nombre fini de fois sur tout intervalle $[x, x+\omega]$ pour $x > A$. Alors, f est intégrable sur $[A, +\infty[$.

Preuve.

Par Chasles, $\displaystyle\int_A^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, s'il existe, devrait valoir :

$$\int_A^{\lceil A/\omega\rceil\cdot\omega} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=\lceil A/\omega\rceil}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} f(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\lceil\cdot\rceil$ est la fonction "arrondi supérieur". On pourra supposer, sans perte de généralité, que A est telle que $\lceil A/\omega\rceil\cdot\omega = A$, c'est-à-dire $A \in \omega\cdot\mathbb{N}^*$ (car $\omega\cdot\mathbb{N}^*$ a pour suprémum $+\infty$), comme ça on peut simplifier considérablement l'expression ci-haute qui devient alors ceci :

$$\sum_{n=A/\omega}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Puisque $x \mapsto 1/x^\varepsilon$ est strictement décroissante,

$$\left(\frac{1}{(n+1)\omega}\right)^\varepsilon \cdot \omega \leq \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} \frac{1}{x^\varepsilon}\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{n\omega}\right)^\varepsilon \cdot \omega$$

donc par théorème du sandwich, $(*)\ \displaystyle\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} 1/x^\varepsilon\,\mathrm{d}x \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit I tel que "$\lim\limits_{x^-} \operatorname{sgn}(f) \neq \lim\limits_{x^+} \operatorname{sgn}(f)$ et $x \geq A$, ou bien $x = A$" si et seulement si $x \in I$. Alors, puisque f change de signe qu'un nombre fini de fois par tout intervalle de longueur ω (par hypothèse), on sait que I est d'adhérence discrète*, donc une fonction successeur** $\operatorname{suc}(I,\cdot)$ en découle. On peut alors définir $a_0 := A = \min(I)$ et $a_{k+1} := \operatorname{suc}(I, a_k)$ et déterminer que :

$$\int_A^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\to 0 \text{ par dom. avec } (*)}$$

est une série alternée de sommande tendant vers 0, ce qui signifie qu'elle converge, et donc que f est intégrable sur $[A, +\infty[$.

(* un ensemble D est dit discret si chacun de ses points est isolé, c'est-à-dire que pour tout $x \in D$, y existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $|x-y| < \varepsilon_x \iff x = y$ ou $y \notin D$. si l'adhérence de D est discrète, c'est en réalité encore plus simple à expliquer : ça signifie juste que toute intersection de D avec un borné est fini.)

(** sur un ensemble d'adhérence discrète $D \subseteq \mathbb{R}$, y est possible de lister tous les éléments de D de sorte à ce qu'ils soient dans un ordre croissant. le successeur de $x \in D$ te retourne juste l'élément le plus petit de D qui soit strictement plus grand que x. par exemple, pour $D = \mathbb{Z}$, puisque d'adhérence discrète, on a l'incrémentation $(\cdot + 1)$ qui sert de fonction successeur)